Association for Information Systems
AIS Electronic Library (AISeL)

AMCIS 2009 Proceedings

Americas Conference on Information Systems (AMCIS)

2009

A Mathematical Foundation of Diagramming Methods

Motonari Tanabu
Yokohama National University, tanabu@ynu.ac.jp

ダイアグラミング手法の数学的基礎付け
A Mathematical Foundation of Diagramming Methods

田名部 元成
横浜国立大学

Motonari Tanabu
Yokohama National University
tanabu@ynu.ac.jp

和文要旨

本論では、"基本要素とそれらの関係"を記述するためのダイアグラミングツールや手法に共通の理論的基礎付けを与えることを目的とし、現在多く利用されているモデリング手法として UML のクラス図、および ER 図を念頭に、要素とそれらの関係を記述し、そして操作するための数学的考察を与える。クラスを表現するための構造、およびオブジェクトを表現するための構造を定義し、その上にダイアグラムを表現する方法を提案する。これによってダイアグラム同士の演算が自然に定義され、クラスやオブジェクトのダイアグラム集合においてそれらの演算が閉じている性質を持つことを示す。さらにそれらの演算を保存するクラスのダイアグラム集合とオブジェクトのダイアグラムの集合の間の写像について考察する。

ABSTRACT

In this paper, we give a mathematical foundation of diagramming methods that is used for describing basic elements and their relationship. We construct a mathematical structure of class and object diagrams so that some mathematical operations on the diagrams can be naturally defined. The paper shows that a set of class diagrams and a set of object diagrams are both closed under these operations, and that interpretation mapping from a set of class diagrams to a corresponding set of object diagrams preserves the class diagrams operations such as union and intersection.

和文キーワード

ダイアグラミング、クラス図、オブジェクト図、ER モデル、数学的定式化

Keywords

Diagramming, class diagram, object diagram, entity-relationship model, mathematical formulation.

はじめに

現代の情報システムの分析設計では、用途に応じて UML (Unified Modeling Language), IDEF (Integration DEFinition), ER (Entity-Relationship) モデルなど様々のモデリング手法が用いられている。これらの標準は、それぞれ異なる目的に対して定義されたものであるが、手法を構成する要素には共通点も多い。たとえば、UML のクラス図、IDEF1X は、基本的には ER モデルの考え方を基盤としている。これらの手法の多くは、図的な要素をその言語の記号としてもち、その仕様は分析設計ツールとして多くの実装がなされている。設計や分析のためのグラフィカルな描画ツールは、通常ダイアグラミングツールと呼ばれる。グラフィカルなモデリングは、ソースコードのような文章的なそれと異なり、直感的で操作や理解がしやすく、構文的な規則にとらわれずに目的の作業に集中できるため、創造的作業やグループ作業に用いると効果的である。グラフィカルなモデリングは、単なる描画環境を提供するものから、他のシステムで利用可能なソースコードやスキーマを出力できるものや構築したモデル上でシミュレーションができるものまで様々な種類がある。

このようなツールが取り扱う図的手法の多くは、目的が情報システム設計であるかどうかにかかわらず、"基本要素とそれらの関係"を記述するという共通的特徴を有する。たとえば、電気回路は、電気的素子という基本要素を電気伝導体で接続したものであり、EPC (Event Driven Process Chain) はビジネスプロセスを事象の基本要素として、それら事象の連鎖を関係として表したビジネスプロセスの表現手法である。これらの表現手法の理論的背景や哲学的背景はそれぞれに異なり、それらを統一的に議論することは難しいが、"基本要素とそれらの関係"という見方で捉えるとそのような手法に共通の性質については論じることができる。本論では、このような"基本要素とそれらの関係"を記述するためのツールや手法に共通の理論的基礎付けを与えることを目的とする。この"基本要素とそれらの関係"という考え方は、古くから存在する。たとえば、シ

ステム理論 (systems theory) の分野では、システムを要素の集合と要素間の関係をもった総体として認識できる知的構築物として定義している。また、ER モデルでは、対象を実体 (entity) と関係 (relation) として捉えることを基本的な考え方としている。

本論では、上述した目的のために、現在多く利用されているモデリング手法として UML のクラス図、および ER 図を念頭に、要素とそれらの関係を記述し、そして操作するための基礎的な考察を数学的に与える。考察の道具として集合論の基礎的概念のみを利用する。このような数学的な議論は、他の数学の諸概念と親和性を高め、より柔軟な考察と発展の方向性を提供できるだろう。

数学的準備

この節では、以降での説明をより簡潔に表現するために、いくつかの数学的記法を導入する。

集合 X, Y に対して、X から Y への部分関数全体の集合を $\mathrm{PM}(X,Y)$ と表す。より厳密に表現するならば

$$\mathrm{PM}(X,Y) = \{ f \in \wp(X \times Y) \mid \forall x \in X, \forall y, z \in Y. (x,y) \in f \land (x,z) \in f \rightarrow y = z \} \tag{1}$$

となる。ただし、記号$\wp(X)$は集合Xの部分集合全体 (べき集合) を表わす。部分関数 $f \in \mathrm{PM}(X,Y)$ に対して

$$\mathrm{dom}(f) = \{ x \in X \mid \exists y \in Y. (x,y) \in f \} \tag{2}$$

を f の定義域と呼ぶ。また、$(x,y) \in f$ であるとき $y = f(x)$ と書く。任意の $x \in \mathrm{dom}(f) \subset X$ に対して、$f(x) \in Y$ は一意に定まる。

一般に任意の集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対して、その要素 $x \in X$ は、関数

$$x: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \ \text{ where } x(\lambda) \in X_\lambda \text{ for any } \lambda \in \Lambda \tag{3}$$

とみなすことができる。逆に言えば、$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積とは、関数の集合

$$X = \{ x: \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid x(\lambda) \in X_\lambda \text{ for any } \lambda \in \Lambda \} \tag{4}$$

と定義することもできる。いずれの場合にも、ひとつ以上の λ に対して $X_\lambda = \emptyset$ となるときは $X = \emptyset$ と約束する。

添え字 $\lambda \in \Lambda$ に対して、$\pi_\lambda(x) = x(\lambda)$ によって定義される関数 $\pi_\lambda: X \longrightarrow X_\lambda$ は X のλ-射影と呼ばれ、$\pi_\lambda(x)$は x の λ-成分と呼ばれる。定義域 X の部分集合 R に対する関数 π_λ の像は、通常の関数と同様に定義される：

$$\pi_\lambda(R) = \{ x(\lambda) \mid \exists x \in R \} = \{ \xi \in X_\lambda \mid \exists x \in R, x(\lambda) = \xi \}. \tag{5}$$

像 $\pi_\lambda(R)$ をR のλ-成分と呼ぶ。

クラスの表現

オブジェクト指向においてクラスとは、設計や観察の対象ドメインの共通の機能や性質を有するオブジェクトの総称である。クラス同士は（自身も含めて）互いに関連しあうことが想定されており、上述したような“基本要素とその関係”という枠組みで捉えることのできる典型的な考え方である。クラス間の論理的関係は、例えば UML ではクラス図を使って表現される。UML では、クラス図のほかにオブジェクト図と呼ばれる別のタイプの図的表現方法を提供しており、これらは相互の補完的関係にある。クラスとはオブジェクトの総称、あるいは抽象化であり、逆にオブジェクトは、クラスの具体化、あるいは具現化である。近年では他のモデリング手法でも、この考え方は多く採択されている。たとえば ER モデルを基盤とするいくつかの手法では、実体を実体クラスと実体インスタンス、関連を関連クラスと関連インスタンスに区別している。このようなクラスとオブジェクトという考え方を有する手法においては、クラス同士の関係性は、各クラスに対応するオブジェクトと、そのオブジェクト間の関係性に反映される。本節では、基本要素としてクラスを考え、クラス間の論理的関係性を取り扱うための数学的定式化を与える。

これからクラス図の定式化を与える。ただし、ここでのクラス図とは、UML で定義されているような図的要素をもつ 2 次元の実体ではなく、そのような図として表現される実体に存在する理論的な要素とそれらの関係に対する別の記号的表現である。本論の定式化は (Baader, Calvanese, McGuinness, Nardi and Patel-Schneider, 2007) の ER モデルとクラス図の表現、および (Chen, 1976) に影響されたものである。まず、クラス記号を要素とする非空 (nonempty) の集合 U_c を用意する。これ

をクラス普遍集合と呼ぶことにする。クラス普遍集合は、任意の集合であるが、同一カテゴリのクラス図を取り扱う際は固定して考える。クラス間の関係性を特定させるために、役割 (role) を表わす非空の集合 U を用意する。これを役割普遍集合と呼び、同様に固定して考える。さらに役割普遍集合 U からクラス普遍集合への U_c 部分関数の集合 $\mathbb{A} \subset \mathrm{PM}(U, U_C)$ を考える。ただし、

$$\forall a, b \in \mathbb{A}. a \neq b \rightarrow \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b) = \emptyset, \tag{6}$$

$$\bigcup\{\mathrm{dom}(a) \mid a \in \mathbb{A}\} = U \tag{7}$$

を満たすものとする。集合 $\mathbb{A}$ を関連集合、その要素を関連と呼ぶことにする。関連は、部分関数であり、役割を定めると、すなわち関数の引数として役割を指定すると、それに対応するクラスを値として得ることができるものである。

この条件は $\{\mathrm{dom}(a) \mid a \in \mathbb{A}\}$ が U の分割となっていることと同値である。任意の役割 $u, v \in U$ に関して、U 上の二項関係 $\sim$ を $u \sim v \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{A}, u \in \mathrm{dom}(a) \wedge v \in \mathrm{dom}(a)$ によって定義すれば、$\sim$ は同値関係であること、および同値類全体の集合が $\{\mathrm{dom}(a) \mid a \in \mathbb{A}\}$ と一致することは容易に確かめることができる。同値類全体の集合を $U/\mathbb{A}$ と書くこともある。これまでの説明をまとめ、クラス空間を次のように定義する。

定義 1 クラス空間 (class space) とは、次をみたす 3 つ組み $\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A})$ のことである。

$$U_C \neq \emptyset, U \neq \emptyset, \mathbb{A} \subset \mathrm{PM}(U, U_C), \{\mathrm{dom}(a) \mid a \in \mathbb{A}\}\text{は } U \text{ の分割}. \tag{8}$$

定義 2 $\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A})$ をクラス空間とする。$\mathbb{S}$ から誘導されるクラス図集合 (set of class diagrams induced by $\mathbb{S}$) とは、

$$\mathbb{D}_C(\mathbb{S}) = \{(C, A) \mid C \subset U_C \wedge A \subset \mathbb{A} \wedge \forall a \in A. a\big(\mathrm{dom}(a)\big) \subset C\} \tag{9}$$

のことである。以後、$\mathbb{S}$が文脈から明かであるときには、$\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ の代わりに $\mathbb{D}_C$ と書くことにする。以上で、クラス図を表現することが可能となる。

上の定義の直観的理解を得るために、例を使って考えてみよう。いま、クラス普遍集合を $U_C = \{c_1, c_2, c_3\}$ とし、役割普遍集合を $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ とする。そして関連集合を $\mathbb{A} = \{a_1, a_2\}$ とする。ただし $a_1 = \{(u_1, c_1), (u_2, c_2)\}$, $a_2 = \{(u_3, c_2), (u_4, c_3)\}$ とする。各関連の定義域につて、$\mathrm{dom}(a_1) = \{u_1, u_2\}, \mathrm{dom}(a_2) = \{u_3, u_4\}$ であるから $\mathrm{dom}(a_1) \cap \mathrm{dom}(a_2) = \emptyset$ であり、また $\mathrm{dom}(a_1) \cup \mathrm{dom}(a_2) = U$ であることが分かる。上述したとおり関連 $a \in \mathbb{A}$ は部分関数で、役割 $u \in \mathrm{dom}(a)$ を指定すれば、この役割に対応するクラス $a(u)$ が定まる。役割普遍集合と関連集合を与えれば、クラス間の論理的関係が与えられたことになる。クラス図集合 $\mathbb{D}_C$ は

$$\begin{aligned}
&(\emptyset, \emptyset), (\{c_1\}, \emptyset), (\{c_2\}, \emptyset), (\{c_3\}, \emptyset),\\
&(\{c_1, c_2\}, \emptyset), (\{c_1, c_2\}, \{a_1\}), (\{c_2, c_3\}, \emptyset), (\{c_2, c_3\}, \{a_2\}), (\{c_3, c_1\}, \emptyset),\\
&(U_C, \emptyset), (U_C, \{a_1\}), (U_C, \{a_2\}), (U_C, \{a_1, a_2\})
\end{aligned} \tag{10}$$

の 13 個の要素から成る。これらの要素は、それぞれ1つのクラス図を表わしている。例えば、$(C, A) = (\{c_1, c_2\}, \{a_1\})$ は、2 つのクラスc_1, c_2 とひとつの関連 a_1 からなるひとつの図である。関連 a_1 の定義域は $\mathrm{dom}(a_1) = \{u_1, u_2\}$ であり、それぞれの役割に対する値は $a_1(u_1) = c_1, a_1(u_2) = c_2$ であるから、クラス図集合の条件、$a_1(\mathrm{dom}(a_1)) = \{c_1, c_2\} \subset C$ を満たしている。

次に、クラス図集合内のクラス同士の演算を定義しよう。これからの議論は、特に断らない限り、クラス空間を $\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A})$ に固定し、$\mathbb{D}_C$ でクラス図集合を表わすことにする。

定義 3 クラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ に対して、$(C_1 \cup C_2, A_1 \cup A_2)$ を(C_1, A_1) と (C_2, A_2) の和 (union) と呼び、$(C_1, A_1) \cup (C_2, A_2)$ で表す。

命題 1 $\mathbb{D}_C$ は和に関して閉じている。

証明 2 つのクラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ に対して $(C, A) = (C_1 \cup C_2, A_1 \cup A_2)$ とする。$\mathbb{D}_C$ の要素であるための 3 つの条件を示す。(1) $C_1 \subset U_C, C_2 \subset U_C$ だから $C = C_1 \cup C_2 \subset U_C$ となる。(2) $A_1 \subset \mathbb{A}, A_2 \subset \mathbb{A}$ より $A = A_1 \cup A_2 \subset \mathbb{A}$。(3) $a \in A$ を任意にとる。$a \in A_1$ または $a \in A_2$ であるから、$a\big(\mathrm{dom}(a)\big) \subset C_1$ または $a\big(\mathrm{dom}(a)\big) \subset C_2$ となる。ゆえにいずれの場合にも $a\big(\mathrm{dom}(a)\big) \subset C_1 \cup C_2 = C$ を満たす。 □

定義 4 クラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ に対して、$(C_1 \cap C_2, A_1 \cap A_2)$ を(C_1, A_1) と (C_2, A_2)の積 (intersection) と呼び、$(C_1, A_1) \cap (C_2, A_2)$で表す。

命題 2 $\mathbb{D}_C$ は積に関して閉じている。

証明 2 つのクラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ を任意にとる。(1) $C_1 \subset U_C$ および $C_2 \subset U_C$ が成り立つから、$C_1 \cap C_2 \subset U_C$ が言える。(2) $A_1 \subset \mathbb{A}$ および $A_2 \subset \mathbb{A}$ が成り立つから、$A_1 \cap A_2 \subset \mathbb{A}$ が言える。(3) 任意の $a \in A_1 \cap A_2$ に対して、$a(\mathrm{dom}(a)) \subset C_1$ かつ、$a(\mathrm{dom}(a)) \subset C_2$ であるから、$a(\mathrm{dom}(a)) \subset C_1 \cap C_2$ が言える。 □

定義 5 クラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ に対して、

$$C = C_1 \setminus C_2, \tag{11}$$

$$A = \{a \in A_1 | a(\mathrm{dom}(a)) \cap C_2 = \emptyset\} \tag{12}$$

とするとき (C, A) を (C_1, A_1) と (C_2, A_2) の差 (difference) と呼び、$(C_1, A_1) \setminus (C_2, A_2)$ で表す。

命題 3 $\mathbb{D}_C$ は差に関して閉じている。

証明 2 つのクラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ を任意にとり、$(C, A) = (C_1, A_1) \setminus (C_2, A_2)$ とおく。(1) 明かに$C = C_1 \setminus C_2 \subset U_C$ である。 また、(2) $A \subset A_1 \subset \mathbb{A}$ が言える。(3) $a \in A$ を任意にとる。定義より $a \in A_1$ かつ $a(\mathrm{dom}(a)) \cap C_2 = \emptyset$ が成り立つ。前者より $a(\mathrm{dom}(a)) \subset C_1$、後者より $a(\mathrm{dom}(a)) \subset U_C \setminus C_2$ が言えるから、$a(\mathrm{dom}(a)) \subset C_1 \cap (U_C \setminus C_2) = C_1 \setminus C_2$ が言える。 □

命題 4 $(U_C, \mathbb{A}) \in \mathbb{D}_C$.

証明 (1) $U_C \subset U_C$, (2) $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}$, (3) $\mathbb{A} \subset \mathrm{PM}(U, U_C)$ より任意の $a \in A$ に対して$a(\mathrm{dom}(a)) \subset U_C$ を満たす。 □

定義 6 クラス図 $(C, A) \in \mathbb{D}_C$ に対して、$(U_C, \mathbb{A}) \setminus (C, A)$ を (C, A) の補完 (complement) と呼び $(C, A)^c$ で表す。

命題 5 任意のクラス図 $(C_1, A_1), (C_2, A_2) \in \mathbb{D}_C$ に対して $(C_1, A_1) \setminus (C_2, A_2) = (C_1, A_1) \cap (C_2, A_2)^c$ が成立する。

証明 (1) 左辺の第 1 要素は $C_1 \setminus C_2$ であり、右辺の第 1 要素 $C_1 \cup (U_C \setminus C_2) = C_1 \setminus C_2$ と一致する。(2) 左辺の第 2 要素は $\{a \in A_1 | a(\mathrm{dom}(a)) \cap C_2 = \emptyset\}$ である。一方、右辺の第 2 要素は $A_1 \cap \{a \in \mathbb{A} | a(\mathrm{dom}(a)) \cap C_2 = \emptyset\}$ であるが、$A_1 \subset \mathbb{A}$ より $A_1 \cap \mathbb{A} = A_1$ が言えるからこれは左辺とそれ一致する。 □

命題 6 クラス図 $(C, A) \in \mathbb{D}_C$ に対して、$((C, A)^c)^c = (C, A)$ が成り立つための必要十分条件は、

$$\forall a \in \mathbb{A}. (a(\mathrm{dom}(a)) \subset C \Rightarrow a \in A). \tag{13}$$

証明 $(\bar{C}, \bar{A}) = (U_C, \mathbb{A}) \setminus (C, A)$ とおく。定義より、$\bar{C} = U_C \setminus C$ および$\bar{A} = \{a \in \mathbb{A} | a(\mathrm{dom}(a)) \cap C = \emptyset\}$ である。次に$(\bar{\bar{C}}, \bar{\bar{A}}) = (U_C, \mathbb{A}) \setminus (\bar{C}, \bar{A})$ とおく。同様に $\bar{\bar{C}} = U_C \setminus \bar{C}$ および $\bar{\bar{A}} = \{a \in \mathbb{A} | a(\mathrm{dom}(a)) \cap \bar{C} = \emptyset\}$である。このことから、$C = \bar{\bar{C}}$ は常に成り立つことが分かる。$A = \bar{\bar{A}}$を仮定する。$\bar{\bar{A}} = \{a \in \mathbb{A} | a(\mathrm{dom}(a)) \cap (U_C \setminus C) = \emptyset\}$=$\{a \in \mathbb{A} | a(\mathrm{dom}(a)) \subset C\}$であるから、$A = \bar{\bar{A}}$であることは、

$$\forall a \in A. (a \in \mathbb{A} \wedge a(\mathrm{dom}(a)) \subset C) \wedge \forall a \in \mathbb{A}. (a(\mathrm{dom}(a)) \subset C \Rightarrow a \in A). \tag{14}$$

と同値であるが、$(C, A) \in \mathbb{D}_C$であることから前半部分は常に成り立つことが分かる。よって、後半部分が必要十分条件となる。 □

以上のことをまとめると $(U_C, U, \mathbb{A})$ から定まるクラス図集合 $\mathbb{D}_C$ は、演算 $\cup, \cap, \setminus$ に対してそれぞれ閉じていることが示され、complement を $(U_C, \mathbb{A})$ からの差として定義すると、集合論における補集合と似た性質を持つことが示された。一般に、クラス図に対して補演算を続けて 2 回施したとき、それは元のクラス図には戻らないが、任意の$a \in \mathbb{A}$ に対して $a(\mathrm{dom}(a)) \subset C \Rightarrow a \in A$ が満たされるとき、かつその時に限り $((C, A)^c)^c = (C, A)$ が成り立つ。最後に、クラス空間同士の比較に関する命題を挙げる。

命題 7 2 つのクラス空間 $\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A}), \mathbb{T} = (U_C, U, \mathbb{B})$ に対して、

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{D}_C(\mathbb{S}) \subset \mathbb{D}_C(\mathbb{T}). \tag{15}$$

証明　いま$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$であるとし、$(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ を任意にとる。クラス図集合の定義より、$C \subset U_C,\ A \subset \mathbb{A}$, および任意の $a \in A$ に対して $a\big(\mathrm{dom}(a)\big) \subset C$が成り立つ。$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ より明らかに$A \subset \mathbb{B}$。結局、$C \subset U_C,\ A \subset \mathbb{B}$, および任意の $a \in A$ に対して$a\big(\mathrm{dom}(a)\big) \subset C$ が 言える。これは、$(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{T})$ であることを意味する。 □

オブジェクトの表現

共通なクラスを有する異なるクラス図が与えられた時、二つのクラス図を合成し、より統合的なモデルを得たい場合があるだろう。この際、各々に対応して描かれていたオブジェクト図をうまく統合させて、統合後のモデルのオブジェクト図が整合的であるようにできるだろうか。あるいは、実体のオブジェクト間の関係性が、統合モデルでうまく表現されることを保証できるだろうか。逆に、クラス図からいくつかの要素を削除した場合、その削除に伴ってオブジェクト図のどこが変更されなければならないだろうか。前節では、クラス図を数学的に定式化し、クラス図間の演算を考察したが、本節では、上述した問題にも対応するため、オブジェクト図の表現方法についても考察する。一般的にクラスには性質（属性）や機能（操作）という要素が備わるが、本論では、議論の第一段階として基本要素（クラス、オブジェクト）間の接続関係にのみ焦点を当てるため、クラスに備わる性質や機能などの要素を無視する。この議論は、ER モデルなどの他の手法にも同様に適用できる。

さて、オブジェクト図に対する数学的表現を与えよう。まず、オブジェクト記号全体の集合（オブジェクト普遍集合）U_O を用意する。クラス図のときと同様にこの集合は固定して考える。U_O の要素は、それぞれどのクラスの要素であるかは既定されていない。オブジェクトをいくつかの“クラス”に分解するために、クラス識別子集合 Γ と、関数 $x\colon \Gamma \longrightarrow \wp(U_O)$ を用意する。ただし、$x(\gamma)$ は非空でかつ互いに素 (disjoint) であることを要請する。すなわち、

$$\forall \gamma \in \Gamma .\, x(\gamma) \neq \emptyset, \tag{16}$$

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma .\, x(\gamma_1) \cap x(\gamma_2) \neq \emptyset \Longrightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \tag{17}$$

が満たされるとする。関数 $x\colon \Gamma \longrightarrow \wp(U_O)$ は、関数値を列挙した列として $x = \{x(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ と表現してもよい。いわば $x(\gamma)$ はクラス γ に対応するオブジェクトの集合であり、x はオブジェクト集合族である。

クラス図のときと同様に役割普遍集合 U を用意する。この U はクラス図におけるクラスとクラスを結びつける「関連」に対応するオブジェクト図のリンク集合が結びつけているオブジェクト集合を特定するためのものである。次に役割普遍集合 U からクラス識別子集合 Γ への部分関数の集合 $\mathbb{L} \subset \mathrm{PM}(U, \Gamma)$ を用意する。これは、オブジェクト図の（同一クラスから得られる）リンクの集合に対応するもので、

$$\forall l_1, l_2 \in \mathbb{L} .\, l_1 \neq l_2 \to \mathrm{dom}(l_1) \cap \mathrm{dom}(l_2) = \emptyset, \tag{18}$$

$$\bigcup \{\mathrm{dom}(l) \mid l \in \mathbb{L}\} = U \tag{19}$$

を満たすものとする。この条件は、クラス図の場合の関連集合の条件に対応している。クラス分けされたオブジェクトの集合、そのクラス間の関連、およびその関連からオブジェクト集合の種類を特定するための対応が定まると $\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{L}, x)$ がひとつ定まる。これをオブジェクト空間と呼ぶ。次に、オブジェクト空間の定義を再度まとめて提示しておく。

定義 7　オブジェクト空間 (object space) とは、次をみたす 3 つ組み $\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{L}, x)$ のことである。

$$U_O \neq \emptyset, U \neq \emptyset, \tag{20}$$

$$\mathbb{L} \subset \mathrm{PM}(U, \Gamma) \text{ ただし} \{\mathrm{dom}(l)\}_{l \in \mathbb{L}} \text{ は } U \text{ の分割}, \Gamma \neq \emptyset \tag{21}$$

$$x\colon \Gamma \longrightarrow \wp(U_O) \text{ ただし} \{x(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \text{ は非空の互いに素な集合のクラス} \tag{22}$$

オブジェクト空間 $\mathfrak{S}$ によって誘導されるオブジェクト図 (O, L, ρ) の全体の集合 $\mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$ を次のように定義する。

O はオブジェクト図のオブジェクトを表わす。実際には部分関数 $O \in \mathrm{PM}\big(\Gamma, \wp(U_O)\big)$ であり、ただし

$$\forall \gamma \in \mathrm{dom}(O) .\, O(\gamma) \subset x(\gamma) \tag{23}$$

を満たすものとする。この要請は、オブジェクト図で定義されている各クラスに対して、そのクラスに対応するオブジェクトは、オブジェクト集合の要素でなければならないというものである。この条件は、$O = \{O(\gamma)\}_{\gamma \in \mathrm{dom}\,(O)}$ が素 (disjoint) な集合のクラスであることを保証する。なぜならば、任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{dom}(O)$ に対して、$O(\gamma_1) \cap O(\gamma_2) \neq \emptyset$ だとすると、$\emptyset \neq O(\gamma_1) \cap O(\gamma_2) \subset x(\gamma_1) \cap x(\gamma_2)$ だから、x の条件より $\gamma_1 = \gamma_2$ が言えるからである。なお、$O(\gamma) = \emptyset$ も許されることに注意されたい。この場合は、クラス γ に対応するオブジェクトは 1 つも出現していないことを表わす。

L は、オブジェクト図のリンク種別の集合である。クラス図の関連に相当する。次の条件を要請する。

$$L \subset \mathbb{L} \wedge \forall l \in L.\, l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O). \tag{24}$$

この条件は、各リンクの接続先の識別子は、オブジェクト内のオブジェクト集合の識別子に現れなければならないことを意味している。

最後に、ρ は各オブジェクトを結ぶ、ひとつひとつのリンクを表わす。$\rho \in \mathrm{PM}\left(\mathbb{L}, \bigcup_{l \in L} \wp\left(\prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)\right)\right)$ であり、$\mathrm{dom}(\rho) = L$ かつ $\forall l \in \mathrm{dom}(l).\, \rho(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)$ であることを要請する。以上の 3 つの条件を満たすオブジェクト図 (O, L, ρ) 全体の集合をオブジェクト図集合と呼ぶ。まとめた定義は次の通りである。

定義 8　$\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{L}, x)$ をオブジェクト空間とする、$\mathfrak{S}$ から誘導されるクラス図集合 (set of object diagrams induced by $\mathfrak{S}$) とは、

$$\mathbb{D}_O(\mathfrak{S}) = \left\{ (O, L, \rho) \;\middle|\; \begin{array}{c} O \in \mathrm{PM}(\Gamma, \wp(U_O))\ \mathrm{s.t.}\ O(\gamma) \subset x(\gamma)\ \text{for all}\ \gamma \in \mathrm{dom}(O), \\ L \in \wp(\mathbb{L})\ \mathrm{s.t.}\ l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O)\ \text{for all}\ \ l \in L, \text{and} \\ \rho \in \mathrm{PM}\left(\mathbb{L}, \bigcup_{l \in L} \wp\left(\prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)\right)\right)\ \mathrm{s.t.}\ \ \mathrm{dom}(\rho) = L \\ \text{and}\ \rho(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)\ \ \text{for all}\ l \in \mathrm{dom}(\rho). \end{array} \right\} \tag{25}$$

のことである。文脈上 $\mathfrak{S}$ が明らかな時には、$\mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$ の代わりに $\mathbb{D}_O$ と書くことにする。

これからオブジェクト図集合上の演算を定義する。以下、オブジェクト空間 $\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{L}, x)$ は固定する。

定義 9　オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ に対して、

$$O = \{(\gamma, O_1(\gamma) \cup O_2(\gamma)) \mid \gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \cup \mathrm{dom}(O_2)\}, \tag{26}$$

$$L = L_1 \cup L_2, \tag{27}$$

$$\rho = \{(l, \rho_1(l) \cup \rho_2(l)) \mid l \in L\} \tag{28}$$

で定まる (O, L, ρ) を (O_1, L_1, ρ_1) と (O_2, L_2, ρ_2) の和 (union) と呼び、$(O_1, L_1, \rho_1) \cup (O_2, L_2, \rho_2)$ で表す。ただし、$O_1(\gamma) \cup O_2(\gamma)$ において、γ がO_1、O_2 の定義域にないときは、それらの値は $\emptyset$ として取り扱う。ρ においても同様である。

命題 8　$\mathbb{D}_O$は和に関して閉じている。

証明　　オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ を任意にとり、$(O, L, \rho) = (O_1, L_1, \rho_1) \cup (O_2, L_2, \rho_2)$ とする。

(A) 明らかに $O \in \mathrm{PM}(\Gamma, \wp(U_O))$ である。任意のクラス識別子 $\gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \cup \mathrm{dom}(O_2)$ に対して (i) $\gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \cap \mathrm{dom}(O_2)$ であるとき、$O_1(\gamma) \subset x(\gamma)$ かつ $O_2(\gamma) \subset x(\gamma)$ が言えるから、$O(\gamma) = O_1(\gamma) \cup O_2(\gamma) \subset x(\gamma)$ が言える。(ii) $\gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \setminus \mathrm{dom}(O_2)$であるとき、$O_1(\gamma) \subset x(\gamma)$ かつ $O_2(\gamma) = \emptyset$ が言えるから $O(\gamma) = O_1(\gamma) \cup O_2(\gamma) = O_1(\gamma) \subset x(\gamma)$ が言える。(iii) $\gamma \in \mathrm{dom}(O_2) \setminus \mathrm{dom}(O_1)$ についても同様である。

(B) 次に$l \in L$=$L_1 \cup L_2$ を任意にとる。$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1)$ または $l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_2)$ である。だから、$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1) \cup \mathrm{dom}(O_2) = \mathrm{dom}(O_1 \cup O_2) = \mathrm{dom}(O)$ を満たす。

(C) ρについては、明らかに、$\rho \in \mathrm{PM}\left(\mathbb{L}, \bigcup_{l \in L} \wp\left(\prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)\right)\right)$ であり、$\mathrm{dom}(\rho) = L$ を満たす。任意の $l \in \mathrm{dom}(\rho) = L_1 \cup L_2$ に対して (i) $l \in L_1 \cap L_2$ のとき ρ_1, ρ_2 の定義より $\rho_1(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma)$ かつ $\rho_2(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_2(\gamma)$ であるから、$\rho(l) = \rho_1(l) \cup \rho_2(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) \cup O_2(\gamma) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)$ が示される。(ii) $l \in L_1 \setminus L_2$ のとき $\rho_1(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma)$ かつ $\rho_2(l) = \emptyset$ であり、さらに任意の $\gamma \in l(\mathrm{dom}(l))$ について $O_2(\gamma) = \emptyset$ であるから、$\rho(l) = \rho_1(l) \cup \rho_2(l) = \rho_1(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) \cup O_2(\gamma) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)$ が示される。(iii) $l \in L_2 \setminus L_1$ のときも同様である。 □

定義 10 オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ に対して、

$$O = \{(\gamma, O_1(\gamma) \cap O_2(\gamma)) \mid \gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \cap \mathrm{dom}(O_2)\}, \tag{29}$$

$$L = L_1 \cap L_2, \tag{30}$$

$$\rho = \{(l, \rho_1(l) \cap \rho_2(l)) | l \in L\} \tag{31}$$

で定まる (O, L, ρ)を(O_1, L_1, ρ_1)と(O_2, L_2, ρ_2) の積 (intersection) と呼び、$(O_1, L_1, \rho_1) \cap (O_2, L_2, \rho_2)$ で表す。

命題 9 $\mathbb{D}_O$は積に関して閉じている。

証明　オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ を任意にとり、$(O, L, \rho) = (O_1, L_1, \rho_1) \cap (O_2, L_2, \rho_2)$とする。(A) 明らかに$O \in \mathrm{PM}(\Gamma, \wp(U_O))$である。任意のクラス識別子$\gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \cap \mathrm{dom}(O_2)$に対して、$O(\gamma) = O_1(\gamma) \cap O_2(\gamma) \subset x(\gamma)$が言える。(B) $l \in L$=$L_1 \cap L_2$ を任意にとる。$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1)$かつ $l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_2)$である。ゆえに $l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1) \cap \mathrm{dom}(O_2) = \mathrm{dom}(O)$ を満たす。(C) ρについては、$\mathrm{dom}(\rho) = L$を満たす。任意の $l \in \mathrm{dom}(\rho) = L_1 \cap L_2$ に対して$\rho_1(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma)$ かつ $\rho_2(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_2(\gamma)$であるから、$\rho(l) = \rho_1(l) \cap \rho_2(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) \cap O_2(\gamma) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)$ が示される。 □

次にオブジェクト図同士の差を定義する。差の考え方には 2 通りある。ひとつは、2 つのオブジェクト図に対して、単純に引く側のオブジェクトとリンクを引かれる側から取り去るというものである。もうひとつは、引く側のオブジェクトが属するクラスを引かれる側から取り去るというものである。後者の方法は、前者に比べてより多くの要素を取り除く。クラス図との対応を考えるならば、オブジェクト図の差を、クラス単位で定義したほうが、クラス図演算の結果をオブジェクト図演算の結果に対応させやすくなる。まず、後者の差の定義を与える。

定義 11 オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ に対して、

$$O = \{(\gamma, O_1(\gamma)) | \gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \setminus \mathrm{dom}(O_2)\}, \tag{32}$$

$$L = \{l \in L_1 | l(\mathrm{dom}(l)) \cap \mathrm{dom}(O_2) = \emptyset\}, \tag{33}$$

$$\rho = \{(l, \rho_1(l)) | l \in L\} \tag{34}$$

で定まる (O, L, ρ) を (O_1, L_1, ρ_1) と (O_2, L_2, ρ_2) の差(difference) と呼び、$(O_1, L_1, \rho_1) \setminus (O_2, L_2, \rho_2)$ で表す。

命題 10 $\mathbb{D}_O$は差に関して閉じている。

証明　オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ を任意にとり、$(O, L, \rho) = (O_1, L_1, \rho_1) \setminus (O_2, L_2, \rho_2)$とする。(A) 明らかに$O \in \mathrm{PM}(\Gamma, \wp(U_O))$である。任意のクラス識別子$\gamma \in \mathrm{dom}(O_1) \setminus \mathrm{dom}(O_2)$について、$\gamma \in \mathrm{dom}(O_1)$が言えるから、$O(\gamma) = O_1(\gamma) \subset x(\gamma)$ が言える。(B) 次に $l \in L$ を任意にとる。$l \in L_1$ だから、$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1)$ を満たす。一方、任意の $\gamma \in l(\mathrm{dom}(l))$ に対して、$\gamma \notin \mathrm{dom}(O_2)$であるから、$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \Gamma \setminus \mathrm{dom}(O_2)$である。故に、$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1) \setminus \mathrm{dom}(O_2) = \mathrm{dom}(O)$ を満たす。(C) ρについては、$\mathrm{dom}(\rho) = L$ を満たす。任意の $l \in L$ に対して、$l \in L_1$ であるから、$\rho(l) = \rho_1(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)$ が示される。 □

次に、単純な差の演算を定義する。この演算は、引く側の図に存在しているオブジェクトとリンクを引かられる側の図から取り除くものである。

定義 12　オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ に対して、

$$O = \{(\gamma, O_1(\gamma) \setminus O_2(\gamma)) \mid \gamma \in \mathrm{dom}(O_1)\}, \tag{35}$$

$$L = L_1 \setminus L_2, \tag{36}$$

$$\rho = \{(l, \{\mathbb{r} \in \rho_1(l) | \forall \gamma \in l(\mathrm{dom}(l)). \pi_\gamma(\mathbb{r}) \notin O_2(\gamma)\}) | l \in L\} \tag{37}$$

で定まる (O, L, ρ) を (O_1, L_1, ρ_1) と (O_2, L_2, ρ_2) のオブジェクト差 (object difference) と呼び、$(O_1, L_1, \rho_1) \ominus (O_2, L_2, \rho_2)$ で表す。

命題 11 $\mathbb{D}_O$はオブジェクト差に関して閉じている。

証明　オブジェクト図 $(O_1, L_1, \rho_1), (O_2, L_2, \rho_2) \in \mathbb{D}_O$ を任意にとり、$(O, L, \rho) = (O_1, L_1, \rho_1) \ominus (O_2, L_2, \rho_2)$ とする。

(A) 明らかに $O \in \mathrm{PM}(\Gamma, \wp(U_O))$ である。任意のクラス識別子 $\gamma \in \mathrm{dom}(O_1)$ について、$O(\gamma) = O_1(\gamma) \setminus O_2(\gamma) \subset O_1(\gamma) \subset x(\gamma)$ が言える。

(B) 次に $l \in L$ を任意にとる。$l \in L_1 \setminus L_2$ より、$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1)$ かつ $l(\mathrm{dom}(l)) \subset \Gamma \setminus \mathrm{dom}(O_2)$ であるから、$l(\mathrm{dom}(l)) \subset \mathrm{dom}(O_1) \setminus \mathrm{dom}(O_2) = \mathrm{dom}(O)$ が満たされる。

(C) ρ については、$\mathrm{dom}(\rho) = L$ を満たす。任意の $l \in L$ をとる。ρ の定義より $l \in L_1$ であるから、$\rho_1(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma)$ が満たされる。また式 (36) の条件式は、

$$\forall \gamma \in l(\mathrm{dom}(l)). \pi_\gamma(\mathbb{r}) \notin O_2(\gamma) \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \forall \gamma \in l(\mathrm{dom}(l)). \pi_\gamma(\mathbb{r}) \in x(\gamma) \setminus O_2(\gamma) \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{r} \in \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} x(\gamma) \setminus O_2(\gamma) \tag{40}$$

と同値変形できる。したがって、

$$\begin{aligned}\rho(l) = \rho_1(l) \cap \left(\prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} x(\gamma) \setminus O_2(\gamma)\right) \subset \left(\prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma)\right) \cap \left(\prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} x(\gamma) \setminus O_2(\gamma)\right) \\ = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) \cap \left(x(\gamma) \setminus O_2(\gamma)\right) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O_1(\gamma) \setminus O_2(\gamma) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)\end{aligned} \tag{41}$$

となり、$\rho(l) \subset \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)$ が言える。 □

命題 12 $R = \left\{\left(l, \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} x(\gamma)\right) \middle| l \in \mathbb{L}\right\}$ とするとき、$(x, \mathbb{L}, R) \in \mathbb{D}_O$.

証明　定義より、$x \in \mathrm{PM}(\Gamma, \wp(U_O))$ である。任意のクラス識別子 $\gamma \in \mathrm{dom}(x)$ について、明らかに $x(\gamma) \subset x(\gamma)$ が成り立つ。任意の $l \in \mathbb{L}$ に対して $l(\mathrm{dom}(l)) \subset \Gamma = \mathrm{dom}(x)$ が成り立つ。また明らかに $\mathrm{dom}(R) = \mathbb{L}$ である。 □

定義 13 オブジェクト図 $(O, L, \rho) \in \mathbb{D}_O$ に対して、$(x, \mathbb{L}, R) \ominus (O, L, \rho)$ を (O, L, ρ) の補完 (complement) と呼び $(O, L, \rho)^c$ で表す。

命題 13 オブジェクト図 $(O, L, \rho) \in \mathbb{D}_O$ に対して、$((O, L, \rho)^c)^c = (O, L, \rho)$ が成り立つための必要十分条件は、

$$\forall l \in \mathbb{L}. \rho(l) = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma). \tag{42}$$

証明　$(\bar{O}, \bar{L}, \bar{\rho}) = (x, \mathbb{L}, R) \ominus (O, L, \rho)$ とおく。ただし、$R = \left\{\left(l, \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} x(\gamma)\right) \middle| l \in \mathbb{L}\right\}$ とする。さらに、$(\bar{\bar{O}}, \bar{\bar{L}}, \bar{\bar{\rho}}) = (x, \mathbb{L}, R) \ominus (\bar{O}, \bar{L}, \bar{\rho})$ とおく。定義より $\bar{O}$ は、任意の $\gamma \in \mathrm{dom}(x)$ について $\bar{O}(\gamma) = x(\gamma) \setminus O(\gamma)$ を満たす。また $\bar{L} = \mathbb{L} \setminus L$ であり、任意の $l \in \bar{L}$ について $\bar{\rho}(l) = \{\mathbb{r} \in R(l) | \forall \gamma \in l(\mathrm{dom}(l)). \pi_\gamma(\mathbb{r}) \notin O(\gamma)\}$ を満たす。同様に、任意の $\gamma \in \mathrm{dom}(x)$ について $\bar{\bar{O}}(\gamma) = x(\gamma) \setminus (x(\gamma) \setminus O(\gamma)) = O(\gamma)$ を満たし、また $\bar{\bar{L}} = \mathbb{L} \setminus \bar{L} = L$ であり、任意の $l \in \bar{\bar{L}} = L$ について $\bar{\bar{\rho}}(l) = \{\mathbb{r} \in R(l) | \forall \gamma \in l(\mathrm{dom}(l)). \pi_\gamma(\mathbb{r}) \notin \bar{O}(\gamma)\}$ を満たす。任意の $l \in L$ について

$$\bar{\bar{\rho}}(l) = \{\mathbb{r} \in R(l) | \forall \gamma \in l(\mathrm{dom}(l)). \pi_\gamma(\mathbb{r}) \in O(\gamma)\} = \left\{\mathbb{r} \in R(l) \middle| \mathbb{r} \in \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma)\right\} = \prod_{\gamma \in l(\mathrm{dom}\,(l))} O(\gamma) \tag{43}$$

が満たされるから、命題は示された。 □

命題 13 は、オブジェクト図の補完の補完が元に戻るための必要十分条件は、オブジェクト図に現れるすべてのオブジェクトは、関連 l に関して全て関係している、すなわちリンクが存在するということに他ならない。

本節では、オブジェクト図の表現と演算を定義したが、結果としてオブジェクト図集合は、演算 $\cup, \cap, \setminus, \ominus$ について閉じていることが示された。

クラスとオブジェクトの対応

前節までに、クラス図およびオブジェクト図の表現方法と、その定義からもたらされるいくつかの命題を示した。ここでは、クラス図とオブジェクト図との間の対応関係について考察する。そのために、クラス空間$\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A})$とオブジェクト空間$\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{A}, x)$を考える。

命題 14 クラス空間 $\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A})$に対して、集合$U_O$と関数$x: U_C \longrightarrow \wp(U_O)$が、

$$\forall c \in U_C . x(c) \neq \emptyset, \tag{44}$$

$$\forall c_1, c_2 \in U_C . c_1 \neq c_2 \Longrightarrow x(c_1) \cap x(c_2) = \emptyset \tag{45}$$

を満たすとき、$\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{A}, x)$ はオブジェクト空間となる。

証明　任意の$c \in U_C$ に対して、$\emptyset \neq x(c) \subset U_O$であるから、$U_O \neq \emptyset$ である。クラス空間の定義より$U \neq \emptyset$であり、$\mathbb{A} \subset \mathrm{PM}(U, U_C)$ かつ $\{\mathrm{dom}(a) \mid a \in \mathbb{A}\}$は U の分割であるから、オブジェクト空間の条件も満たす。$\{x(c)\}_{c \in U_C}$ は非空の互いに素な集合のクラスであるから、これもオブジェクト空間の条件を満たす。 □

命題 15 $\mathbb{S} = (U_C, U, \mathbb{A})$, $\mathfrak{S} = (U_O, U, \mathbb{A}, x)$ をそれぞれクラス空間、オブジェクト空間とする。$\mathbb{S}$から誘導されたクラス図$(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ に対して、2 つの関数$O: C \longrightarrow \wp(U_O)$、および$\rho: A \longrightarrow \bigcup_{a \in A} \wp\left(\prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} O(c)\right)$がそれぞれ

$$\forall c \in C . O(c) \subset x(c), \tag{46}$$

$$\forall a \in A . \rho(a) \subset \prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} O(c) \tag{47}$$

を満たすとき、(O, A, ρ) は $\mathfrak{S}$ 誘導されたオブジェクト図となる。すなわち$(O, A, \rho) \in \mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$.

証明　(i) $(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ だから $C \subset U_C$である。よって$\mathrm{dom}(O) = C \subset U_C$である。また明らかに、$O \in \mathrm{PM}(U_C, \wp(U_O))$であり、式(45)より任意の $c \in \mathrm{dom}(O) = C$ に対して$O(c) \subset x(c)$ である。(ii) $(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ より$A \subset \mathbb{A}$である。すなわち$A \in \wp(\mathbb{A})$である。また、$(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ より任意の $a \in A$ に対して、$a(\mathrm{dom}(a)) \subset C = \mathrm{dom}(O)$ が言える。(iii) 明かに、$\rho \in PM\left(\mathbb{A}, \bigcup_{a \in A} \wp\left(\prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} O(c)\right)\right)$であり、任意の$a \in \mathrm{dom}(\rho) = A$ に対して、$\rho(a) \subset \prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} O(c)$ であることは、式(46)と同値である。 □

関数 x はクラス普遍集合のクラスを、オブジェクト集合に写像する。オブジェクト図において、各クラスに対応して存在するオブジェクトは、オブジェクト集合の部分集合であり、またそれらの間のリンクは、部分集合の直積の部分集合で与えられる。次にクラス図空間からオブジェクト空間への対応関係を与える。

定義 14 以下のような関数の組$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$をクラス図集合$\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$からオブジェクト集合$\mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$ への解釈と呼ぶ。

$$\varphi_1: U_C \longrightarrow \wp(U_O) \ \text{ s.t. } \forall c \in U_C . \varphi_1(c) \subset x(c) \tag{48}$$

$$\varphi_2: \mathbb{A} \longrightarrow \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \wp\left(\prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} \varphi_1(c)\right) \text{ s.t. } \forall a \in \mathbb{A} . \varphi_2(a) \subset \prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} \varphi_1(c). \tag{49}$$

命題 16 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$をクラス図集合 $\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ からオブジェクト集合$\mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$ への解釈とする。クラス図 $(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ に対して

$$[\![C]\!]_{\varphi_1} = \{(c, \varphi_1(c)) \mid c \in C\}, \tag{50}$$

$$[\![A]\!]_{\varphi_2} = \{(a, \varphi_2(a)) \mid a \in A\} \tag{51}$$

とすると、$\left([\![C]\!]_{\varphi_1}, A, [\![A]\!]_{\varphi_2}\right) \in \mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$ を満たす。

証明　(i) $[\![C]\!]_{\varphi_1} \in \mathrm{PM}(U_C, \wp(U_O))$であり、任意の$c \in C$ に対して $[\![C]\!]_{\varphi_1}(c) = \varphi_1(c) \subset x(c)$ を満たす。(ii) $\mathrm{A} \in \wp(\mathbb{A})$ であり、$(C, A) \in \mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ だから、任意の$a \in \mathbb{A}$ に対して、$a(\mathrm{dom}(a)) \subset A = \mathrm{dom}\left([\![C]\!]_{\varphi_1}\right)$ を満たす。(iii) $[\![A]\!]_{\varphi_2} \in \mathrm{PM}\left(\mathbb{A} \longrightarrow \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \wp\left(\prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} \varphi_1(c)\right)\right) = \mathrm{PM}\left(\mathbb{A} \longrightarrow \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \wp\left(\prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} [\![C]\!]_{\varphi_1}(c)\right)\right)$ であり、任意の$a \in \mathbb{A}$ に対して $[\![A]\!]_{\varphi_2}(a) = \varphi_2(a) \subset \prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} \varphi_1(c) = \prod_{c \in a(\mathrm{dom}\,(a))} [\![C]\!]_{\varphi_1}(c)$を満たす。 □

以後、オブジェクト図 $\left([\![C]\!]_{\varphi_1}, A, [\![A]\!]_{\varphi_2}\right)$ をクラス図 (C,A) の$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$による解釈と呼び、$[\![(C,A)]\!]^\varphi$ で表す。

定理 1 クラス図集合からオブジェクト集合への解釈は、クラス図演算の和(∪)、積(∩)、差(\)の演算を保存する。

証明 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ をクラス図集合 $\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ からオブジェクト集合 $\mathbb{D}_O(\mathfrak{S})$ への解釈とする。2 つのクラス図 $(C_1,A_1),(C_2,A_2)\in\mathbb{D}_C$を任意にとる。

(1) φが和演算を保存することを示す。$(C,A)=(C_1,A_1)\cup(C_2,A_2)$とおき、$(O,L,\rho)=[\![(C_1,A_1)]\!]^\varphi\cup[\![(C_2,A_2)]\!]^\varphi$とおく。

(i) $[\![(C,A)]\!]^\varphi=[\![(C_1\cup C_2, A_1\cup A_2)]\!]^\varphi=\left([\![C_1\cup C_2]\!]_{\varphi_1}, A_1\cup A_2, [\![A_1\cup A_2]\!]_{\varphi_2}\right)$である。

(ii) $(O,L,\rho)=\left([\![C_1]\!]_{\varphi_1},A_1,[\![A_1]\!]_{\varphi_2}\right)\cup\left([\![C_2]\!]_{\varphi_1},A_2,[\![A_2]\!]_{\varphi_2}\right)$だから、$L=A_1\cup A_2$であり、

$$O=\left\{\left(c,[\![C_1]\!]_{\varphi_1}(\mathrm{c})\cup[\![C_2]\!]_{\varphi_1}(\mathrm{c})\right)\middle|c\in C_1\cup C_2\right\}=\left\{\left(c,[\![C_1\cup C_2]\!]_{\varphi_1}(\mathrm{c})\right)\middle|c\in C_1\cup C_2\right\}=[\![C_1\cup C_2]\!]_{\varphi_1} \tag{52}$$

$$\rho=\left\{\left(a,[\![A_1]\!]_{\varphi_2}(a)\cup[\![A_2]\!]_{\varphi_2}(a)\right)\middle|a\in A_1\cup A_2\right\}=\left\{\left(a,[\![A_1\cup A_2]\!]_{\varphi_2}(a)\right)\middle|a\in A_1\cup A_2\right\}=[\![A_1\cup A_2]\!]_{\varphi_2} \tag{53}$$

であるから、$[\![(C,A)]\!]^\varphi=(O,L,\rho)$であることが示された。

(2) φが積演算を保存することは、和(∪)を差(∩)に読み替えれば (1) と同様に示すことができる。

(3) φが差演算を保存することを示す。$(C,A)=(C_1,A_1)\setminus(C_2,A_2)$とおき、$(O,L,\rho)=[\![(C_1,A_1)]\!]^\varphi\setminus[\![(C_2,A_2)]\!]^\varphi$とおく。

(i) 定義より $A=\left\{a\in A_1\middle|a\left(\mathrm{dom}(a)\right)\cap C_2=\emptyset\right\}=\left\{a\in A_1\middle|a\left(\mathrm{dom}(a)\right)\cap\mathrm{dom}\left([\![C_2]\!]_{\varphi_1}\right)=\emptyset\right\}$ であり、$[\![(C,A)]\!]^\varphi=\left([\![C_1\setminus C_2]\!]_{\varphi_1},A,[\![A]\!]_{\varphi_2}\right)$ である。

(ii) $(O,L,\rho)=\left([\![C_1]\!]_{\varphi_1},A_1,[\![A_1]\!]_{\varphi_2}\right)\setminus\left([\![C_2]\!]_{\varphi_1},A_2,[\![A_2]\!]_{\varphi_2}\right)$ だから、

$$O=\left\{\left(c,[\![C_1]\!]_{\varphi_1}(\mathrm{c})\right)\middle|c\in C_1\setminus C_2\right\}=\left\{\left(c,[\![C_1\setminus C_2]\!]_{\varphi_1}(\mathrm{c})\right)\middle|c\in C_1\setminus C_2\right\}=[\![C_1\setminus C_2]\!]_{\varphi_1} \tag{54}$$

$$L=\left\{a\in A_1\middle|a\left(\mathrm{dom}(a)\right)\cap\mathrm{dom}\left([\![C_2]\!]_{\varphi_2}\right)=\emptyset\right\}=A \tag{55}$$

$$\rho=\left\{\left(a,[\![A_1]\!]_{\varphi_2}(a)\right)\middle|a\in A\right\}=[\![A]\!]_{\varphi_2} \tag{56}$$

であるから、$[\![(C,A)]\!]^\varphi=(O,L,\rho)$であることが示された。 □

解釈φによってクラス図集合とオブジェクト集合の間に、演算を保存する対応付けを行うことができた。もちろん解釈φは、複数存在の可能性がある。オブジェクト図が与えられたクラス図に対応するものになっているかどうかは、クラス図集合からオブジェクト集合上への解釈が存在するかという問題として定義される。

以下の部分では、これまでの議論とは異なる別の視点からの性質を紹介する。まず、与えられた空間をより小さな空間から生成するという基底の概念を導入する。

定義 15 クラス空間 $\mathbb{S}=(U_C,U,\mathbb{A})$ から誘導されたクラス図集合 $\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ の要素が、集合$\mathbb{B}$の要素の任意個の和で表せるとき、$\mathbb{B}$ を$\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ の基底と呼ぶ。

命題 17 クラス空間 $\mathbb{S}=(U_C,U,\mathbb{A})$から誘導されたクラス図集合 $\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ に対して、

$$\mathbb{B}_1=\{(\{c\},\emptyset)|c\in U_C\}, \tag{57}$$

$$\mathbb{B}_2=\left\{\left(a\left(\mathrm{dom}(a)\right),\{a\}\right)\middle|a\in\mathbb{A}\right\} \tag{58}$$

とおくと、$\mathbb{B}=\mathbb{B}_1\cup\mathbb{B}_2$ は $\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ の基底である。

証明 任意の $(C,A)\in\mathbb{D}_C(\mathbb{S})$ に対して、

$$(C,A)=(C,\emptyset)\cup\left(\bigcup_{a\in\mathbb{A}}a\left(\mathrm{dom}(a)\right),\mathbb{A}\right) \tag{59}$$

と書くことができる。右辺にある和の第 1 項は $\mathbb{B}_1$ の要素の和で表せ、第 2 項は $\mathbb{B}_2$ の要素の和で表せる。 □

結論

本論では、“基本要素とそれらの関係”を記述するためのダイアグラミングツールや手法に共通の理論的基礎付けを与えることを目的とし、要素とそれらの関係を記述し、そして操作するための数学的考察を与えた。本論で定義したクラス空間とオブジェクト空間によって誘導されるそれぞれのダイアグラム集合は、和、積、および差の演算について閉じており、またそれらの演算はクラス図集合からオブジェクト図集合への解釈によっても保存されることが示された。これらの性質は、本論の議論に対して、他の数学的理論の結果を適用できることを示している。たとえば、位相空間は、与えられた集合とその部分集合からなるクラスで、集合和と可算個の集合積について閉じているものであるが、この考え方をクラス図空間やオブジェクト図空間などのダイアグラム空間にも適用すれば、位相空間における開集合概念に対応するダイアグラムを定義することにより、位相空間の持つ豊富な諸性質を本論の議論に適用できる可能性を示唆する。クラス図をいくつかの基本部品の和や差などの演算によって構築できるかどうかを理論的に議論することは、実用的にも価値が高いと言える。また、ダイアグラム間に距離を導入すれば、あるダイアグラムに似たダイアグラムを提示できる可能性もある。一般位相空間概念は、距離空間の抽象化によってもたらされたものであるため、ダイアグラム空間に距離概念を導入することは位相空間論の適用と親和性が高い。これらの議論には数学的考察は欠かせない。本論では、ダイアグラムの定式化と演算に焦点を当てたが、今後は、位相空間や測度空間のなどの概念を適用し、より柔軟な展開が可能となるよう考察を続けたい。

謝辞

本研究は科研費（20653020）の助成を受けたものである。

参考文献

1. Baader, F., Calvanese, D., McGuinness, D., Nardi, D. and Patel-Schneider, P. (2007) The Description Logic Handbook: Theory, Implementation and Applications, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.
2. Chen, P. (1976) The Entity-Relationship Model - Toward a Unified View of Data, *ACM Transactions on Database Systems*, 1, 1, 9-36.
3. Tanabu, M. (2008) Formal Semantics of ERD, in *Proceedings of the 2008 Fall National Conference of Japan Society for Management Information (JASMIN)*, November 8-9, Sendai, Miyagi, Japan, 184-187. (in Japanese)